ISSN 2305 - 4352

ARTICULO ORIGINAL

LA ECUACIÓN DE SCHRODINGER EN EL CONTEXTO DEL ÁLGEBRA GEOMÉTRICA

THE SCHRODINGER EQUATION IN THE CONTEXT OF GEOMETRIC ALGEBRA

Henry Cristhian Zubieta Rojas[1]; Javier Moore[2]

RESUMEN

En este artículo estudiamos la ecuación de Schrodinger desde un punto de vista algebraico, para el estudio empleamos el enfoque polinomial del álgebra geométrica, como consecuencia obtenemos una forma alternativa de escribir la ecuación de Schrodinger y obtenemos de forma natural el término de Stern-Gerlach.

Palabras clave: *Álgebra geométrica; Ecuación de schrodinger.*

ABSTRACT

In this article we study the Schrodinger equation from an algebraic point of view, for the study we use the polynomial approach of the geometric algebra, as a consequence we obtain an alternative way of writing the Schrodinger equation and we obtain in a natural way the term of Stern-Gerlach.

Key words: *Geometric algebra; Schrodinger equation.*

[1]Docente en la Universidad Nacional José Faustino Sánchez Carrion Mayor de San Marcos. Facultad de Ciencias Matemáticas. Email: henry14671@gmail.com

[2]Docente en la Unicersidad Mayor de San Marcos. Facultad de Ciencias Matemáticas. Email: moore_16711@gmail.com

Recibido:21/03/18 Aprobado:13/09/18

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo, intenta dar un enfoque alternativo de la ecuación de Schrodinger utilizando para ello una versión polinomial del álgebra geométrica, (Moore, 2014). Motivados por los trabajos (Vaz Jr., 1996, p.255) y (Lounesto, 2001, p.51) estudiamos la ecuación de Schrodinger desde un punto de vista algebraico, para ello definimos polinomios provistos de un producto sujeto a las llamadas condiciones de Grassman - Dirac, este producto es llamado producto geométrico y proporciona a los polinomios una estructura de álgebra asociativa real euclidiana llamada álgebra geométrica (álgebra de Clifford), al cual denotamos con AG(3).

Primero mostramos dos presentaciones previas de la ecuación de Schrodinger, el modelo escalar presentado por Schrodinger, luego, el modelo matricial presentado por Pauli. Finalmente en base al álgebra geométrica AG(3) presentamos la ecuación de Schrodinger a través del modelo geométrico y obtenemos de forma natural el término de Stern-Gerlach.

PRELIMINARES

En esta sección, presentamos algunos conceptos y resultados preliminares desarrollados en (Moore, 2014, p.4-37), que serán usados a lo largo del artículo.

Álgebra Geométrica

Comenzamos estableciendo una alternativa al concepto de álgebra de Clifford del espacio R^3, al que llamamos Álgebra Geométrica Tridimensional. Ver (Lounesto, 2001, p.41), (Vaz Jr., 1996, p.239) y (Sobczyk, 2018, p.17).

Denotamos con R [e_1, e_2, e_3] al anillo de polinomios de variables e_1, e_2, e_3 y coeficientes reales

Definición 2.1 El álgebra geométrica tridimensional, denotado con AG(3), es un su espacio de R [e_1, e_2, e_3], con polinomios de la forma.

$$M = a_0 + \sum_{i=1}^{3} a_i c_i + \sum_{1\le i<j\le 3}^{3} a_j c_j + a_{123} e_{123}$$

provisto ... o por las condi...

$$e_j e_i + e_i e_j = 2\delta_{ij}$$

con i,j = 1,2,3 y ... de Kronecker dado por

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

El producto ... modificado por las condiciones de Dirac es llamado producto geométrico y los elementos de AG(3) son llamados multivectores.

AG(3) con el producto geométrico es un R - álgebra asociativa de dimensión 8 y base

$$\{1, e_1, e_2, e_3, e_{12}, e_{13}, e_{23}, e_{123}\}$$

Para ver ...do ver (Moore, 2014).

Multivectores, subespacios y subalgebras

Los k - vectores son: vectores (1-vector), bivectores (2-vector), trivectores (3-vector) y los escalares (0 - vector).

Explícitamente los k - vectores son de la forma:

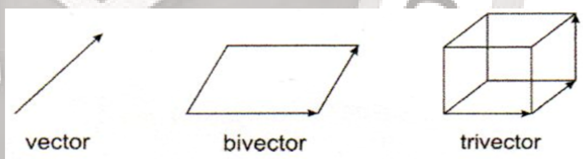
escalar: $a = a_0 1$

vector: $v = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$

bivector: $B = a_{12} e_{12} + a_{13} e_{13} + a_{23} e_{23}$

trivector: $T = a_{123} e_{123}$

Los k ... de AG(3) y cada uno de ellos tiene una presentación geométrica.



Los k - vectores forman un subespacio de AG(3), denotado con

$$\langle AG(3)\rangle_k$$

$\langle AG(3)\rangle_0$ denota a los escalares

$\langle AG(3)\rangle_1$ denota a los vectores

$\langle AG(3)\rangle_2$ denota a los bivectores

Produ... $\langle AG(3)\rangle_3$ denota a los trivectores

Definición 2.2

Sean ... Y

para t... $P \in \langle AG(3)\rangle_j$ ... $M \in \langle AG(3)\rangle_K$

1. El producto exterior de P y M es el multivector

definido por:

$P \uparrow M \in \langle AG(3)\rangle_{J+k}$

$$P \uparrow M = \begin{cases} \langle PM\rangle_{j+k};\ si\ j+k \le 3 \\ 0 \qquad ;\ j+k > 3 \end{cases}$$

2. El producto interior de P y M es el multivector

definido por:

$P \downarrow M \in \langle AG(3)\rangle_{|J-k|}$

$$P \downarrow M = \begin{cases} \langle PM\rangle_{|j-k|};\ si\ j \neq 0\ y\ k \neq 0 \\ 0 \qquad ;\ j = 0\ o\ k = 0 \end{cases}$$

3. El producto escalar de P y M es el escalar

definido por:

$P.M \in \langle AG(3)\rangle_0$

$$P.M \in \langle PM\rangle_0\ solo\ \ si\ j = k$$

4. El producto vectorial de los vectores

es el vector

$P, M \in \langle AG(3)\rangle_1$ $\qquad P\ x\ M \in \langle AG(3)\rangle_1$

$P\ x\ M = -(P \uparrow M)_{e_{123}}\ con\ P\ y\ M \in \langle AG(3)\rangle_1$

Definición 2.3

Las funciones de clase *C*∞ definidas en *ΩxI* y con valores en AG(3), denotadas con *C*∞ [*ΩxI;* AG(3)], serán llamadas funciones multivectoriales de clase *C* ∞ y se escribirán.

$$M(x,t) = f_0(x,t) + \sum_{i=1}^{3} f_i(x,t)e_i + \sum_{1\le i\le j\le 3} f_{ij}(x,t)e_i + f_{123}(x,t)e_1e_2e_3$$

La v $f_0, f_i, f_{ij}, f_{123} \in c^\infty[\Omega xI;\ \mathbb{R}]$ y $(x,t) \in \Omega\ x\ I$ bles espaciales $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$ y t denota la variable temporal. Casos especiales de funciones multivectoriales son:

Funciones escalares:

Funciones vectoriale $M = f_0 1$

Funciones bivectoriale $M = f_1e_1 + f_2e_2 + f_3e_3$

Funciones trivectoriales $M = f_{12}e_{12} + f_{13}e_{13} + f_{23}e_{23}$

Derivada geométrica $\quad M = f_{123}e_{123}$

Definición 2.4 Sea *M* ∈ *C*∞[*ΩxI*; *AG*(3)] llamada derivada geométrica de M en AG(3), se define:

$$\nabla M(x,t) := \sum_{n=1}^{3} e_n(\partial_n M)(\boldsymbol{x},t)$$

Sea *M* *C*∝

2. ∈ $\langle AG(3)\rangle_K$,llamada derivada exterior de M en AG(3), se define:

$\nabla\uparrow M \in C^\infty[\Omega xI;\ \langle AG(3)\rangle_{K+1}]$

3. $(\nabla \uparrow M)(\boldsymbol{x},t) = \begin{cases} \langle \nabla M(\boldsymbol{x},t)\rangle_{k+1};\ si\ k < 3 \\ 0 \qquad ;\ k = 3 \end{cases}$ rivada interior de M en AG(3), se define:

$\nabla\downarrow M \in C^\infty[\Omega xI;\ \langle AG(3)\rangle_{K-1}]$

Sea $\quad (\nabla \downarrow M)(\boldsymbol{x},t) = \begin{cases} \langle \nabla M(\boldsymbol{x},t)\rangle_{k-1};\ si\ k > 0 \\ 0 \qquad ;\ k = 0 \end{cases}$

4. Si $M \in C^\infty[\Omega\ x\ I;\ \langle AG(3)\rangle_1] \cong c^\infty[\Omega\ x\ I;\ \mathbb{R}^3]$ ıda escalar de M en AG(3), dado por:

$\nabla.M \in C^\infty[\Omega xI;\ \mathbb{R}]$

5. Sea $\nabla.M = \nabla\downarrow\ M = \langle \nabla M\rangle_0$, llamada derivada vectorial de M en AG(3), es dado por:

$\nabla\ x\ M \in C^\infty[\Omega xI;\ \langle AG(3)\rangle_1]$

Campos n $(\nabla\ x\ M)(\boldsymbol{x},t) = -\nabla \uparrow M(\boldsymbol{x},t)e_{123}$

Definición 2.5

1. *C*∞[Ω*xI*, (ΩxI)*x AG*(3)] denota las funciones de clase *C*∞

M:ΩxI -> (ΩxI)x AG(3)

2. Γ [*ΩxI* ,*AG*(3)] denota los llamados campos multivectoriales en AG(3) es decir:

$M \in \Gamma[\Omega\ x\ I, AG(3)]\ si\ M \in C^\infty[\Omega\ x\ I\ ,(\Omega\ x\ I)x\ AG(3)]$ y $\pi\ o\ M = 1_{\Omega\ x\ I}$

$$\begin{array}{c} (\Omega xI)xAG(3) \\ \pi \downarrow \uparrow M \\ \Omega\ x\ I \end{array}$$

Si $k = 0, M \in \Gamma\ [\Omega\ x\ I;\ \langle AG(3)\rangle_0]$ será llamado campo escalar

Si $k = 1, M \in \Gamma\ [\Omega\ x\ I;\ \langle AG(3)\rangle_1]$ será llamado campo vectorial

Si $k = 2, M \in \Gamma\ [\Omega\ x\ I;\ \langle AG(3)\rangle_2]$ será llamado campo bivectorial

Si $k = 3, M \in \Gamma\ [\Omega\ x\ I;\ \langle AG(3)\rangle_3]$ será llamado campo trivectorial o pseudoescalar

3. Resultados

En estas secciones 3.1 (Lounesto, 2001, p.51) y 3.2 (Vaz, Jr., 1999, p.255) presentamos los modelos tradicionales de la ecuación de Schrodinger. En la seccion 3.3 proponemos dicha ecuación en el

En resumen

contexto del álgebra geométrica AG(3), al cual llamaremos modelo geométrico de la ecuación de Schrodinger.

3.1. Modelo escalar de la Ecuación de Schrodinger

Desarrollada en 1925 por el físico austriaco Erwin Schrodinger, la ecuación de Schrodinger explica todos los fenómenos atómicos, excepto aquellos que implican el magnetismo y la relatividad.

La ecuación es de la forma.

$$ih\frac{\partial\Psi}{\partial t}=\frac{1}{2m}[(-ih\nabla).(-ih\nabla)]\Psi+qV\Psi$$

donde:

i es la unidad imaginaria de los números complejos.

h es la constante de Planck Reducida y es dada por

$h=\frac{h}{2\pi}$ donde h es la constante de Planck.

$\frac{\partial}{\partial t}$ es la derivada parcial respecto al tiempo.

m es la masa de la partícula.

● denota al producto escalar.

∇ es el operador nabla.

q es la carga eléctrica de la partícula.

V es el potencial eléctrico escalar.

$\Psi=\Psi(r,t)\in\mathbb{C}$ es la función de onda.

Algunas observaciones

1. El operador Hamiltoneano H de la ecuación de Schrodinger es.

$$H=\frac{1}{2m}[(-ih\nabla).(-ih\nabla)]+qv$$

2. La expresión $(-ih\nabla).(-ih\nabla)$ denota el producto escalar.

La ecuación de Schrodinger es una ecuación para una partícula moviéndose en un campo eléctrico, pero no en un campo magnético y despreciando los efectos relativistas.

Desarrollando el producto escalar

$(-ih\nabla).(-ih\nabla)=-h^2\nabla.\nabla$ y denotando $\nabla.\nabla$ con ∇^2, la ecuación de Schrodinger resulta en

$$ih\frac{\partial\Psi}{\partial t}=\frac{1}{2m}[-ih\nabla-qA).-ih\nabla-qA)]\Psi+qV\Psi$$

donde: A es el vector potencial del campo electromagnético.

Algunas observaciones:

1. El operador Hamiltoneano H de la ecuación de Schrodinger en un campo electromagnético es

$$H=\frac{1}{2m}[(-ih\nabla-qA).(-ih\nabla-qA)]+qV$$

2. La expresión $(-ih\nabla-qA).(-ih\nabla-qA)$ denota el producto escalar.

Desarrollando el producto escalar

$$ih\frac{\partial\Psi}{\partial t}=\frac{1}{2m}[-h^2\nabla^2+ihq(\nabla.A)+ihq(A.\nabla)+q^2A^2]\Psi+qV\Psi$$

$$=\frac{1}{2m}[-h^2\nabla^2+ihq(\nabla.A+A.\nabla)q^2A^2]\Psi+qV\Psi$$

Esta ecuación incluye al campo magnético en la ecuación de Schrodinger, pero no implica todavía el giro (spin) del electrón.

3.2. Modelo Matricial de la Ecuación de Schrodinger

Propuesta en 1927 por el físico aleman Wolfgang Pauli, la ecuación de Pauli reformula la ecuación de Schrodinger en el contexto matricial, tomando en cuenta la interacción del espin con el campo electromagnético.

La ecuación de Pauli tiene la forma

$$ih\frac{\partial\Psi}{\partial t}=\frac{1}{2m}[(\sigma.(-ih\nabla-qA))(\sigma.(-ih\nabla-qA))]\Psi+qV\Psi$$

2. La expresión $(\sigma.(-ih\nabla-qA))(\sigma.(-ih\nabla-qA)$ denot el producto matricial de $\sigma.(-ih\nabla-qA)$ consigo mismo.

Las matrices de Pauli son de la forma

$$\sigma_1=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\quad\sigma_2=\begin{bmatrix}0&-i\\i&0\end{bmatrix}\quad\sigma_3=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$$

y tienen las siguientes propiedades.

1. $\sigma_j\in\mathbb{C}^{2x2}$ álgebra matricial compleja de orden 2

2. $\sigma_1\sigma_2=i\sigma_3;\ \sigma_2\sigma_3=i\sigma_1;\ \sigma_3\sigma_1=i\sigma_2$

3. $\sigma_j\sigma_k+\sigma_k\sigma_j=2\delta_{jk}I$

Con $j, k=1,2,3$; $I=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ es la matriz identidad y

$$\delta_{jk}=\begin{cases}1, si\ j=k\\0; si\ j\neq k\end{cases}$$

4. $\sigma_k\sigma_j=-\sigma_j\sigma_k$ para todo $j\neq k$

Definimos el vector matricial de Pauli, como vector cuyas componentes son las matrices de Pauli.

$$\sigma=(\sigma_1;\sigma_2;\sigma_3)$$

Sea $\sigma\in R^3$ con $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$. Definimos el producto escalar de σ con a, denotado con σ.a, de la siguiente forma.

$$\sigma.a = \sigma_1\alpha_1 + \sigma_2\alpha_2 + \sigma_3\alpha_3$$

Un resultado importante es el siguiente. Sea $a, b\ e\ R^3$ y a el vector de Pauli

$$(\sigma.a)(\sigma.b) = (a.b)I + i\sigma.(axb)$$

Donde:

a.b denota el producto escalar de vectores

a *x* b denota el producto vectorial de vectores

Para el caso a=b

$$(\sigma.a)^2 = (\sigma.a)(\sigma.a) = (a.a)I$$

Puesto que $axa = 0$

Aplicando el resultado anterior a la ecuación de Pauli se obtiene

$$ih\frac{\partial\Psi}{\partial t}=\frac{1}{2m}[(\sigma.(-ih\nabla-qA))(\sigma.(-ih\nabla-qA))]\Psi+qV\Psi$$

$$=\frac{1}{2m}[(-ih\nabla-qA).(-ih\nabla-qA)I + i\sigma.((-ih\nabla-qA)x(-ih\nabla-qA))]\Psi+qV\Psi$$

$$=\frac{1}{2m}[(-ih\nabla-qA).(-ih\nabla-qA)I]\Psi+\frac{1}{2m}[i\sigma.((-ih\nabla-qA)x(-ih\nabla-qA))]\Psi+qV\Psi$$

$$=\frac{1}{2m}[(-ih\nabla-qA).(-ih\nabla-qA)]\Psi+\frac{1}{2m}[i\sigma.(-h^2\nabla x\nabla + \mathrm{ihqxA} + \mathrm{ihq.ax\nabla} + q^2AxA)]\Psi+qV\Psi$$

$$=\frac{1}{2m}[(-ih\nabla-qA).(-ih\nabla-qA)]\Psi+\frac{1}{2m}[i\sigma.(ihq\nabla xA)]\Psi+qV\Psi$$

$$=\frac{1}{2m}[(-ih\nabla-qA).(-ih\nabla-qA)]\Psi-\frac{hq}{2m}(\sigma.B)\Psi+qV\Psi$$

El modelo matricial de Pauli describe el giro (spin) del electrón en virtud a $\frac{hq}{2m}(\sigma.B)$ llamado término de Stern - Gerlach. En resumen:

$$\underbrace{ih\frac{\partial\Psi}{\partial t}=\frac{1}{2m}[(-ih\nabla-qA).(-ih\nabla-qA)]\psi+qV\Psi}_{\text{Ecuacion de Schrodinger}}-\underbrace{\frac{hq}{2m}(\sigma.B)\Psi}_{\text{Termino de Stern - Gerlach}}$$

3.3. Modelo Geométrico de la Ecuación de Schrodinger

La ecuacion de Schorodinger en el contexto del álgebra geométrica AG(3) tiene la forma.

$$e_{123}\frac{\partial\Psi}{\partial t}=\frac{1}{2m}[(-e_{123}h\nabla-qA)(-e_{123}h\nabla-qA)]\Psi+qV\Psi$$

El operador hamiltoneano H es :

$$H=\frac{1}{2m}(-e_{123}h\nabla-qA)(-e_{123}h\nabla-qA)+qV$$

Donde la expresión $(-e_{123}h\nabla-qA)(-e_{123}h\nabla-qA)$ denota el producto geometrico

Desarrollando el producto geométrico:

$$e_{123}\frac{\partial\Psi}{\partial t}=\frac{1}{2m}[(-e_{123}h\nabla-qA)(-e_{123}h\nabla-qA)]\Psi+qV\Psi$$

$$=\frac{1}{2m}(-e_{123}h\nabla-qA)[-e_{123}h\nabla\Psi-qA]+qV\Psi$$

$$=\frac{1}{2m}(-h^2.\nabla^2.\Psi+hqe_{123}h(\nabla(\mathrm{A}\Psi)+A(\nabla\Psi)+q^2A^2\Psi)+qV\Psi$$

$$=\frac{1}{2m}(-h^2\nabla^2\Psi+hqe_{123}\nabla(A\Psi)+hqe_{123}\mathrm{A}(\nabla\Psi)+q^2A^2\Psi)+qV\Psi$$

$$=\frac{1}{2m}[-h^2\nabla^2\Psi+hqe_{123}((\nabla A)\Psi)+A.\nabla(\Psi)-A\uparrow\nabla\Psi+A.\nabla(\Psi)+A\uparrow\nabla\Psi)+q^2A^2\Psi]+qV\Psi$$

$$=\frac{1}{2m}\left[-h^2\nabla^2\Psi+hqe_{123}\big((\nabla A+\nabla\uparrow A)\Psi+2A.\nabla\Psi\big)+q^2A^2\Psi\right]+qV\Psi$$

$$=\frac{1}{2m}\left[-h^2\nabla^2\Psi+hqe_{123}\big((\nabla A)\Psi\big)+A.\nabla(\Psi)+hqe_{123}((\nabla\uparrow A)\Psi+A.\nabla\Psi)+q^2A^2\Psi\right]+qV\Psi$$

$$=\frac{1}{2m}[-h^2\nabla^2\Psi+hqc_{123}(\nabla A)\Psi+A\nabla\Psi+q^2A^2\Psi]+qV\Psi+\frac{hq}{2m}e_{123}(\nabla\uparrow A)\Psi+\frac{hq}{2m}e_{123}(A.\nabla\Psi)$$

$$=\frac{1}{2m}[(-e_{123}h\nabla-qA).(-e_{123}h\nabla-qA)]\Psi+qV\Psi+\frac{hq}{2m}e_{123}(\nabla xA)e_{123}\Psi+\frac{hq}{2m}e_{123}(A.\nabla\Psi)$$

$$=\frac{1}{2m}[(-e_{123}h\nabla-qA).(-e_{123}h\nabla-qA)]\Psi+qV\Psi-\frac{hq}{2m}B\Psi+\frac{hq}{2m}e_{123}(A.\nabla\Psi)$$

En el modelo geométrico, el término de Stern - Gerlach surge de forma natural en el álgebra geométrica, a partir del Hamiltoneano, considerando el producto geométrico en lugar del producto escalar o producto matricial.

$$\underbrace{e_{123}h\frac{\vartheta\Psi}{\vartheta t}=\frac{1}{2m}[(-e_{123}h\nabla-qA).(-e_{123}h\nabla-qA)]\Psi+qV\Psi}_{\text{Ecuación de Shrodinger}}-\underbrace{\frac{hq}{2m}B}_{\text{Término de Stem - Gerlach}}\Psi+\frac{hq}{2m}e_{123}(A.\nabla\Psi)$$

C

Usando la versión polinomial del álgebra geométrica se demuestra que es posible reescribir y mejorar la ecuación de Schrodinger, ello se vio al mejorar el modelo escalar y matricial propuestos anteriormente, además de obtener de forma natural un resultado importante en la mecánica cuántica: el término de Stern – Gerlach.

Hemos elegido el álgebra geométrica, debido a que permite, de un modo natural y simple, reformular conceptos del cálculo vectorial y la física.

Su importancia radica en el formalismo que utiliza el mismo que, además de unificar y generalizar los conceptos conocidos, puede trasladarse a mayores dimensiones y aplicarlos tanto a los casos euclidianos como pseudoeuclidiano,ello permitió reformular la ecuación de Schrodinger. Un objetivo que persigue el presente artículo es mostrar que el álgebra geométrica es una estructura matemática adecuada para iniciar un estudio unificado de la relatividad general y mecánica cuántica, además que permitirá una mejor comprensión de teorías en actual desarrollo, como la llamada teoría de cuerdas.

AGRADECIMIENTO

Nos gustaría agradecer al Dr. Edgar Vera, docente principal de la facultad de ciencias matemáticas de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos por la lectura del manuscrito, discusión y sugerencias.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Lounesto, P. (2001). Clifford Algebras and Spinors. 2nd Edition. Cambridge University Press. Cambridge.

Moore, J. (2014). Las Ecuaciones de Maxwell en el contexto del ´algebra geom´etrica.

Sobczyk, G. (2018). From Vectors to Geometric Algebra. New York: Springer. .

Vaz, Jr, A. J. (1996). A´lgebra Geometrica do Espa¸co Euclideano e a Teoria de Pauli. Departamento de Matematica Aplicada - IMECC Universidad Estadual de Campinas CP6065,13081-970. Campinas. S.P. Brazil.

Vaz, Jr, A. J. (1999). A. . ´lgebra Geometrica do Espa¸co-tempo e a Teoria da Relatividad. Departamento de Matematica Aplicada - IMECC Universidad Estadual de Campinas CP6065,13081-970. Campinas. S.P. Brazil